

Pemodelan Arus Stator Motor Induksi Tiga Fasa dengan Metode Gear

NANANG MULYONO, DWI SEPTIYANTO, SUYANTO

Teknik Elektro Politeknik Negeri Bandung, Indonesia
Email : nanang.mulyono@polban.ac.id

Received 1 April 2020 | *Revised* 27 April 2020 | *Accepted* 1 Juni 2020

ABSTRAK

Penelitian ini mendiskusikan proses dan hasil implementasi pemodelan arus stator motor induksi tiga fasa dengan metode Gear. Tujuan penelitian ini adalah menghasilkan program simulasi motor listrik yang mampu menampilkan karakteristik dinamik arus stator motor induksi tiga fasa. Metodologi penyelesaian penelitian ini dimulai dari ide dasar, studi literature, perancangan, pembuatan dan pengujian software. Penerapan metode Gear dibuat dengan bahasa Python. Hasil simulasi arus stator yang diamati pada kondisi transien dan tunak, yaitu nilai maksimum, nilai minimum, waktu transisi dan nilai peak-to-peak. Hasil simulasi tersebut dibandingkan dengan hasil simulasi menggunakan modul solver ODE15 yang tersedia pada Matlab. Simulator yang dibuat dapat mensimulasikan perilaku dinamik motor induksi tiga fasa dengan perbedaan 1,5 %, 0,93 % dan 1,5 % secara berturut-turut untuk arus stator fasa-a, arus stator fasa-b dan arus stator fasa-c.

Kata kunci: model dinamik, motor induksi, metode Gear, ODE15

ABSTRACT

This study discusses the process and results of implementing the stator current modeling of the three-phase induction motor using the Gear method. This study aims to produce an electric motor simulation program that can display the dynamic characteristics of the stator current of a three-phase induction motor. The methodology of completing this research is the basic idea, literature study, design, creation, and software testing. The application of the Gear method is made with the Python programming language. Stator current simulation results are observed in transient and steady conditions, namely the maximum value, minimum value, transition time, and peak-to-peak value. The simulation results are compared with the simulation results using the ODE15 solver module available in Matlab. The simulator created can simulate the dynamic behavior of the stator current of a three-phase induction motor with a difference of 1.5%, 0.93%, and 1.5% respectively for phase-a, phase-b, and phase-c.

Keywords: dynamic model, induction motor, Gear method, ODE15

1. PENDAHULUAN

Karakteristik dinamik motor listrik merupakan salah satu pertimbangan dalam pengujian sistem kendali motor listrik. Pengujian-pengujian eksperimental awal yang dilakukan secara konvensional dengan menggunakan motor secara real pada umumnya akan menimbulkan sejumlah kendala uji yang kurang menguntungkan. Cara konvensional tersebut membutuhkan biaya yang mahal, terutama untuk mesin berkecepatan tinggi atau besar (**Boldea, dkk, 2001**). Simulasi dinamis pada proses perancangan sistem penggerak motor memainkan peran penting dalam pra-pengujian sistem penggerak, menemukan kemungkinan kesalahan desain, atau mencegah kemungkinan *bug/cacat* yang dapat dipenuhi setelah pembuatan. Hal tersebut tergantung pada model dinamis dari motor induksi yang diperlukan dan digunakan (**Kocabas, dkk, 2011**) (**Aleck, 2017**) (**Phukon, dkk, 2015**).

Bélanger (**Bélanger, dkk, 2010**) telah melakukan penelitian dan mengklasifikasikan *digital simulator* seperti *Rapid Control Prototyping (RCP)*, *Hardware-in-the-Loop (HIL)* dan *Software in the Loop (SIL)*. *HIL* memungkinkan untuk digunakan sebagai alat uji berbagai kontroler ketika objek fisik motor tidak tersedia. Mulyono (**Mulyono, dkk, 2018**) telah mengimplementasikan model dinamik motor induksi tiga fasa berbasis metode Runge-Kutta orde empat dan raspberry pi. Simulator tersebut mampu menghasilkan data arus stator dan putaran rotor dengan pola grafiknya relatif sama dengan hasil simulasi menggunakan Matlab. Tetapi memiliki perbedaan lebih kecil dari 11% dan 14% untuk masing-masing besaran arus stator dan putaran rotor. Selain itu, terjadi juga kegagalan mendapatkan solusi ketika interval waktu yang diterapkan pada *solver* Runge-Kutta orde empat sebesar 0,1 detik. Tetapi ketika interval waktu yang diberikan 0,0001 detik, *solver* yang dibuat mampu memberikan solusi. Oleh karena itu terindikasi model dinamik motor induksi yang digunakan merupakan sistem persamaan diferensial *stiff*.

Persamaan diferensial *stiff* sering terjadi pada studi kinetik kimia, sirkuit listrik, vibrasi, sistem kendali dan lain-lain (**Omale, dkk, 2014**). Persamaan diferensial *stiff* merupakan permasalahan metode eksplisit tidak dapat bekerja dan tidak stabil secara numerik kecuali pada interval yang sangat kecil (**Esfandiari, 2017**) (**Omale, dkk, 2014**). Jenis persamaan diferensial tersebut sifatnya tidak unik dan relatif sulit diidentifikasi sejak dini. Permasalahan *stiff numeric* tidak dapat diselesaikan dengan *solver* konvensional (**Rath, dkk, 2017**). Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial *non-stiff* (**Kulikov, 2013**) (**Shampine, dkk, 1979**). Jika metode *non-stiff* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial *stiff* (permasalahan nilai awal), maka *solver* tersebut membutuhkan waktu sangat lama untuk menyediakan solusi / memberikan solusi yang tidak akurat / *solver* gagal menyediakan solusi (**Omale, dkk, 2014**). Metode *multi-step* yang populer untuk permasalahan *stiff* yaitu *BDF (Backward Differentiation Formulae)*. Metode *BDF* dikenal juga sebagai metode Gear. *BDF* merupakan metode implisit yang melibatkan berbagai formula interpolasi (**Rahmouni, dkk, 2017**).

Rahmouni (**Rahmouni, dkk, 2017**) telah melakukan kajian kestabilan transien pada jaringan sistem tenaga 39-bus. Kajian tersebut menggunakan metode Gear dan *Block* untuk menyelesaikan persamaan diferensial dari model jaringan sistem tenaga 39-bus. Hasil simulasi dari kedua metode tersebut dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde empat. Hasil simulasi menggunakan metode Gear dan *Block* menunjukkan hasil yang akurat. Metode Gear membutuhkan 28% dari waktu komputasi metode Runge-Kutta, sedangkan metode *Block* membutuhkan waktu 25% dari waktu komputasi metode Runge-Kutta. Penelitian yang membahas pemodelan dan simulasi motor induksi telah banyak dilakukan seperti yang dilakukan oleh Bora dan timnya (**Boora, dkk, 2013**), Dorjsuren dan timnya (**Dorjsuren, dkk, 2015**), Mengha dan timnya (**Menghal, dkk, 2014**) dan lain lain.

Tujuan penelitian ini adalah menghasilkan program simulasi motor listrik yang mampu menampilkan karakteristik dinamik arus stator motor induksi 3 fasa berdasarkan metode Gear dan bahasa Python sesuai dengan hasil simulasi berbasis modul *solver* ODE15 pada Matlab.

2. METODE GEAR DAN MODEL DINAMIK MOTOR INDUKSI TIGA FASA

2.1 Metode Gear

Metode *multi-step* yang populer untuk permasalahan *stiff* yaitu *BDF* (*Backward Differentiation Formulae*). Rumus *BDF* merupakan fungsi implisit dan biasanya diimplementasikan bersama dengan metode Newton yang dimodifikasi untuk menyelesaikan sistem nonlinear pada setiap langkah waktu. Metode *backward differentiation* memiliki bentuk umum seperti Persamaan (1) (Rahmouni, dkk, 2017).

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i y_{n-i} = h\beta f(t_n, y_n) \tag{1}$$

Dengan α_i, β merupakan koefisien untuk formula *BDF p-step*, nilainya seperti Tabel 1. Metode diferensiasi mundur harus digunakan bersama-sama dengan prediktor karena metode tersebut implisit. Metode Gear merupakan metode *one-step* yang diperoleh dari resultan pasangan *multi-step* yaitu prediktor dan korektor. Metode tersebut memungkinkan terjadinya perubahan lokal dari urutan metode dan ukuran *mesh*. Metode Gear dirumuskan seperti Persamaan (2).

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i y_{n-i} + h\beta f(t_{n+1}, x_{n+1}) \tag{2}$$

Metode Gear orde empat dirumuskan seperti pada Persamaan (3).

$$y_{n+1} = h \frac{12}{25} f_{n+1} + \frac{48}{25} x_n - \frac{36}{25} x_{n-1} + \frac{16}{25} x_{n-2} - \frac{3}{25} x_{n-3} \tag{3}$$

Tabel 1. Koefisien Metode *P-step BDF*

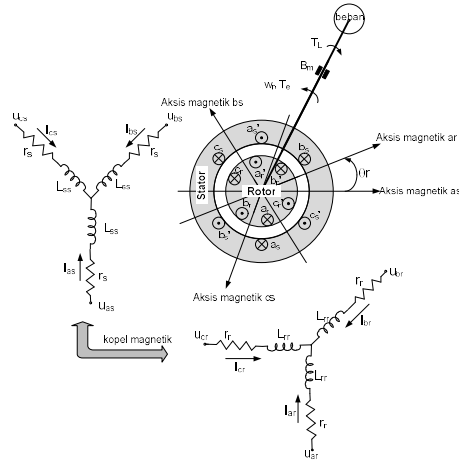
| P | β | α_0 | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|---|------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | | | |
| 3 | $\frac{6}{11}$ | $\frac{18}{11}$ | $-\frac{9}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | | |
| 4 | $\frac{12}{25}$ | $\frac{48}{25}$ | $-\frac{36}{25}$ | $\frac{16}{25}$ | $-\frac{3}{25}$ | |
| 5 | $\frac{60}{137}$ | $\frac{300}{137}$ | $-\frac{300}{137}$ | $\frac{200}{137}$ | $-\frac{75}{137}$ | $-\frac{12}{137}$ |

Ketika ukuran langkahnya konstan h , berorde k , dan langkahnya dari (t_n, y_n) ke (t_{n+1}, y_{n+1}) maka BDF_k dirumuskan seperti Persamaan (4).

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \nabla^m y_{n+1} - hF(t_{n+1}, y_{n+1}) = 0 \tag{4}$$

BDF merupakan *implicit integrator* oleh karena itu *Algebraic equation* y_{n+1} diselesaikan dengan iterasi. Nilai awal untuk iterasi direkomendasikan seperti Persamaan (5) (Shampine, dkk, 1997) (Griffiths, 2016).

$$y_{n+1}^{(0)} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{m} \nabla^m y_n \tag{5}$$



Gambar 1. Motor Induksi 3 Fasa Simetris (Mulyono, dkk, 2018)

2.2 Model Dinamik Motor Induksi Tiga fasa

Lyshevski dan Mulyono (**Lyshevski, 2008**) (**Mulyono, dkk, 2018**) menjelaskan model dinamik motor induksi 3 fasa berbasis pada sirkuit elektromagnetik seperti Gambar 1 dengan belitan stator dan rotornya dikonfigurasi bintang. Berbasis pada Gambar 1, persamaan tegangan pada belitan stator dan rotor, arus stator dan rotor serta *flux linkage* dapat diperoleh dengan menggunakan hukum tegangan Kirchhoff serta dengan menerapkan hukum Newton dan prinsip *co-energy* untuk memperoleh persamaan torca, maka persamaan model dinamik motor induksi diperoleh dalam bentuk persamaan diferensial Cauchy seperti Persamaan (6) sampai dengan Persamaan (35). Parameter-parameternya, yaitu :

- P jumlah kutub [-]
- r_s resistansi belitan Stator [Ω]
- r_r resistansi belitan Rotor [Ω]
- L_{ms} induktansi bersama/mutual Stator-Rotor [H]
- L'_{lr} induktansi bocor [H]
- B_m *viscous Friction Coefficient* [-]
- J momen inersia motor [kg m^2]
- T_L torsi beban [N-m]
- Freq frekuensi dari tegangan yang di terapkan [Hz]
- u_{as} tegangan fasa pada belitan stator-as [V]
- u_{bs} tegangan fasa pada belitan stator-bs [V]
- u_{cs} tegangan fasa pada belitan stator-cs [V]
- u_{ar} tegangan fasa pada belitan rotor-ar [V]
- u_{br} tegangan fasa pada belitan rotor-br [V]
- u_{cr} tegangan fasa pada belitan rotor-cr [V]
- i_{as} arus pada belitan stator-as [A]
- i_{bs} arus pada belitan stator-bs [A]
- i_{cs} arus pada belitan stator-cs [A]
- i'_{ar} arus pada belitan rotor-ar [A]
- i'_{br} arus pada belitan rotor-br [A]
- i'_{cr} arus pada belitan rotor-cr [A]
- ω_r kecepatan sudut [rad/detik]
- θ sudut fasa [rad]
- T_e torsi rotor [N-m]

$$Y = \frac{1}{L_{\Sigma L}} (AX + BX + CX + DU) \tag{6}$$

Dengan

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{di_{as}}{dt} \\ \frac{di_{bs}}{dt} \\ \frac{di_{cs}}{dt} \\ \frac{di'_{ar}}{dt} \\ \frac{di'_{br}}{dt} \\ \frac{di'_{cr}}{dt} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i'_{ar} \\ i'_{br} \\ i'_{cr} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \\ u'_{ar} \\ u'_{br} \\ u'_{cr} \end{bmatrix} \quad (7)$$

A, B, C dan D pada Persamaan (6) merupakan matriks 6x6 seperti Persamaan (8) - (11).

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dengan elemen-elemen matrik A, B, C dan D sebagai berikut:

- $A_{45}, A_{46}, A_{54}, A_{56}, A_{64}, A_{65}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{34}, A_{35}, A_{36}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{61}, A_{62}, A_{63}$ bernilai nol
- $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, B_{31}, B_{32}, B_{33}, B_{44}, B_{45}, B_{46}, B_{54}, B_{55}, B_{56}, B_{64}, B_{65}, B_{66}$ bernilai nol
- $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}$ bernilai nol

Elemen-elemen matrik A, B, C dan D yang tidak sama dengan nol seperti Persamaan (12) – (32).

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = A_{55} = A_{66} = -r_s L_{\Sigma m} \quad (12)$$

$$A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{23}, A_{31}, \text{ dan } A_{32} = -\frac{1}{2} r_s L_{ms} \quad (13)$$

$$B_{14} = B_{25} = B_{26} = r_r L_{ms} \cos \theta_r \quad (14)$$

$$B_{41} = B_{52} = B_{63} = r_s L_{ms} \cos \theta_r \quad (15)$$

$$B_{15} = B_{26} = B_{34} = r_r L_{ms} \cos \left(\theta_r + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (16)$$

$$B_{16} = B_{24} = B_{35} = r_r L_{ms} \cos \left(\theta_r - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (17)$$

$$B_{42} = B_{53} = B_{61} = r_s L_{ms} \cos \left(\theta_r + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (18)$$

$$B_{43} = B_{51} = B_{62} = r_s L_{ms} \cos \left(\theta_r - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (19)$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{31} = C_{54} = C_{65} = 1.299 L_{ms}^2 \omega_r \quad (20)$$

$$C_{13} = C_{21} = C_{32} = C_{45} = C_{56} = C_{64} = -1.299 L_{ms}^2 \omega_r \quad (21)$$

$$C_{14} = C_{25} = C_{36} = C_{41} = C_{52} = C_{63} = L_{\Sigma ms} \omega_r \sin \theta_r \quad (22)$$

$$C_{16} = C_{24} = C_{35} = C_{42} = C_{53} = C_{61} = L_{\Sigma ms} \omega_r \sin \left(\theta_r - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (23)$$

$$C_{15} = C_{26} = C_{34} = C_{43} = C_{51} = C_{62} = L_{\Sigma ms} \omega_r \sin \left(\theta_r + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (24)$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{44} = D_{55} = D_{66} = 2L_{ms} + L'_{lr} \quad (25)$$

$$D_{12} = D_{13} = D_{21} = D_{23} = D_{31} = D_{32} = D_{45} = D_{46} = D_{54} = D_{56} = D_{64} = D_{65} = \frac{1}{2} L_{ms} \quad (26)$$

$$D_{14} = D_{25} = D_{36} = D_{41} = D_{52} = D_{63} = -L_{ms} \cos \theta_r \quad (27)$$

$$D_{16} = D_{24} = D_{35} = D_{42} = D_{53} = D_{61} = -L_{ms} \cos \left(\theta_r - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (28)$$

$$D_{15} = D_{26} = D_{34} = D_{43} = D_{51} = D_{62} = -L_{ms} \cos \left(\theta_r + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (29)$$

Dengan nilai $L_{\Sigma L}$, $L_{\Sigma m}$, dan $L_{\Sigma ms}$ seperti Persamaan (30) - (32)

$$L_{\Sigma L} = (3L_{ms} + L'_{lr})L'_{lr} \quad (30)$$

$$L_{\Sigma m} = 2L_{ms} + L'_{lr} \quad (31)$$

$$L_{\Sigma ms} = \frac{3}{2} L_{ms}^2 + L_{ms} L'_{lr} \quad (32)$$

Putaran rotor dihitung menggunakan Persamaan (33) dan Persamaan (34)

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{P}{2J} (T_e - T_L) - \frac{B_m}{J} \omega_r \quad (33)$$

Dengan

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r \quad (34)$$

Torsi rotor dihitung menggunakan Persamaan (35)

$$T_e = -\frac{P}{2} L_{ms} \left[(i_{as}i_{ar} + i_{bs}i_{br} + i_{cs}i_{cr}) \sin \theta_r + (i_{as}i_{cr} + i_{bs}i_{ar} + i_{cs}i_{br}) \sin \left(\theta_r - \frac{2}{3}\pi \right) + (i_{as}i_{br} + i_{bs}i_{cr} + i_{cs}i_{ar}) \sin \left(\theta_r + \frac{2}{3}\pi \right) \right] \quad (35)$$

3. METODOLOGI PENYELESAIAN

Secara umum, langkah-langkah penelitian dimulai dari ide dasar, studi literatur, perancangan, pembuatan dan pengujian *software*. Tahapan tersebut dijelaskan secara singkat sebagai berikut:

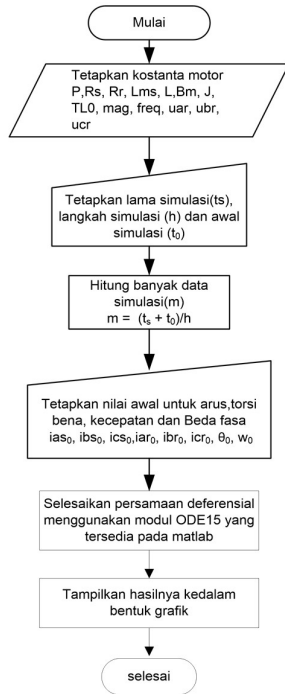
1. Gagasan/ide penelitian ini adalah mengimplementasikan metode penyelesaian persamaan model dinamik pada simulator motor induksi.
2. Studi pustaka, tahapan ini dilakukan melalui telaah literatur terhadap karya-karya yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya khususnya berkaitan dengan simulator motor induksi, model dinamik motor induksi tiga fasa dan penyelesaian persamaan diferensial secara numerik.
3. Perancangan *software*, merupakan tahapan pembuatan algoritma *software* ke dalam bentuk *flowchart* yang terdiri dari program simulasi motor listrik berbasis modul ODE15 dan metode Gear.
4. Realisasi *software*, merupakan tahapan pengkodean kedalam bentuk skrip Matlab dan skrip *Phyton*.
5. Pengujian *software*, tahapan ini terdiri dari dua tahap pengujian yaitu :
 - a. Tahapan pengujian *software* secara individual, tahapan ini dilakukan untuk meyakinkan algoritma Gear yang telah dibuat dapat menghasilkan solusi dari permasalahan persamaan diferensial. Algoritma tersebut diuji dengan menggunakan fungsi yang sederhana yang terdiri dari satu variabel bebas dan satu variabel terikat.
 - b. Tahapan pengujian *software* secara keseluruhan. Tahapan ini merupakan proses validasi *software* simulator motor induksi tiga fasa berbasis metode Gear dengan cara membandingkannya dengan hasil simulasi dengan Matlab berbasis ODE15. Parameter-parameter motor induksi yang dibandingkan adalah arus stator. Parameter-parameter tersebut akan diamati pada nilai maksimum, nilai minimum, waktu transisi dan nilai *peak-to-peak* pada kondisi tunak.

3.1 Program Simulasi Motor Listrik Berbasis ODE15

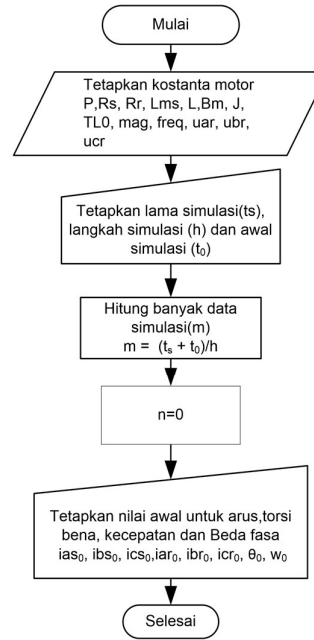
ODE15 merupakan salah satu modul *solver* penyelesaian persamaan diferensial yang tersedia pada Matlab dan metode yang digunakan adalah *Numerical Differentiation Formulas (NDF)*. Metode tersebut merupakan salah satu jenis metode *BDF*. Simulator motor induksi tiga fasa berbasis ODE15 dibuat dalam bentuk *M-File* dengan *flowchart* seperti pada Gambar 2 dan dijelaskan sebagai berikut:

1. Tetapkan nilai parameter-parameter motor seperti jumlah kutub (P), resistansi belitan stator (R_s), resistansi belitan rotor (R_r), induktansi bersama stator-rotor (L_{ms}), *viscous Friction Coefficient* (B_m), momen inersia motor (J), Torsi beban (T_L), Tegangan stator (U_{as} , U_{bs} , U_{sc}), frekuensi (freq), tegangan rotor fasa-a (U_{ar}), tegangan rotor fasa-b (U_{br}), tegangan rotor fasa-c (U_{cr}).
2. Tetapkan nilai lama simulasi (t_s), langkah simulasi (h) dan awal simulasi (t_0).

3. Hitung banyak data simulasi $m = (t_s + t_0)/h$.
4. Tetapkan nilai awal atau kondisi awal untuk arus, torsi beban, kecepatan dan sudut fasa ($ias_0, ibs_0, ics_0, iar_0, ibr_0, icr_0, \theta_0, w_0$).
5. Selesaikan persamaan diferensial (Persamaan (5) dan Persamaan (6) - (34)) menggunakan modul ODE15 yang tersedia pada Matlab.
6. Hitung torsi rotor T_e menggunakan Persamaan (35).
7. Tampilkan hasilnya kedalam bentuk grafik.



Gambar 2. Flowchart Simulator Motor Induksi Tiga Fasa Berbasis ODE15



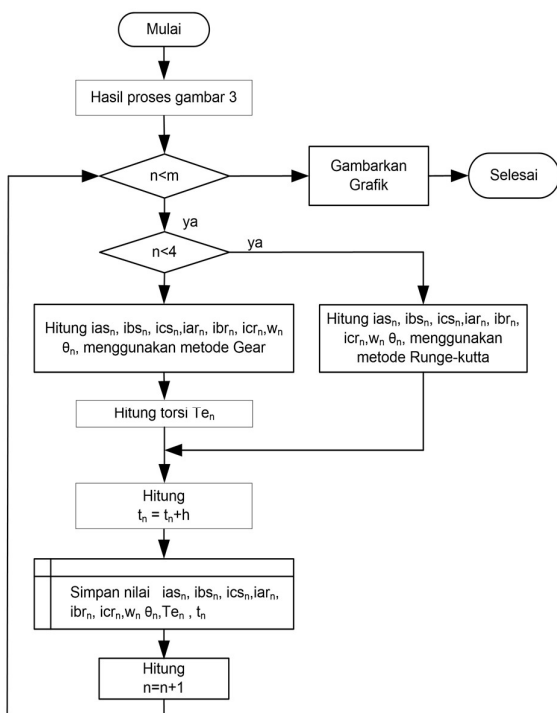
Gambar 3. Flowchart Penetapan Data awal Simulator Motor Induksi Tiga Fasa Berbasis Metode Gear

3.2 Program Simulasi Motor Listrik Berbasis Metode Gear

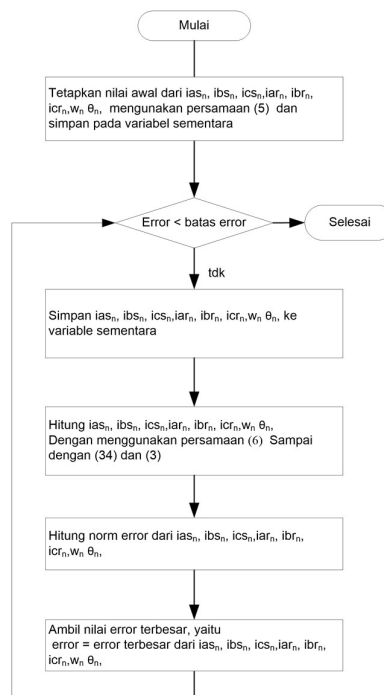
Metode penelitian dititikberatkan pada pembuatan simulator motor induksi tiga fasa yang meliputi metode Gear/*BDF*, Runge-Kutta orde empat, iterasi Gaus-Jacobi dan ODE15. Algoritma simulator berbasis metode Gear/*BDF* dibuat seperti pada Gambar 3 hingga 5 dengan bahasa pemrograman Python. Model dinamik motor induksi yang digunakan seperti Persamaan (6) - (35). Penelitian ini menggunakan metode Gear/*BDF* orde empat seperti Persamaan (1)-(5) dan konstanta-konstantanya dapat dilihat pada Tabel 1. Metode Gear merupakan metode penyelesaian persamaan diferensial yang tidak dapat *self-starting*. Oleh karena itu diperlukan suatu metode untuk membangkitkan data awal. Banyaknya data awal relatif terhadap jenis metode Gear yang digunakan. Penelitian ini memerlukan empat data awal dan metode yang digunakan untuk membangkitkan data awal yaitu metode Runge-Kutta orde empat. Gear merupakan integrator implisit oleh karena itu penelitian ini menggunakan metode iterasi Gaus-Jacobi untuk menyelesaikan fungsi implisit pada metode Gear. Urutan proses pada Gambar 3 dan 4 dijelaskan sebagai berikut:

1. Tetapkan nilai parameter-parameter motor seperti jumlah kutub (P), resistansi belitan stator (R_s), resistansi belitan rotor (R_r), induktansi bersama stator-rotor (L_{ms}), *viscous Friction Coefficient* (B_m), momen inersia motor (J), Torsi beban (T_L), Tegangan stator (U_{as} , U_{bs} , U_{sc}), frekuensi ($freq$), tegangan rotor fasa-a (u_{ar}), tegangan rotor fasa-b (u_{br}), tegangan rotor fasa-c (u_{cr}).
2. Tetapkan nilai lama simulasi (t_s), langkah simulasi (h) dan awal simulasi (t_0).

3. Hitung banyak data simulasi $m = (t_s + t_0)/h$.
4. Tetapkan nilai n sama dengan nol (n adalah nomor/indeks data, indeks data dimulai dari nol).
5. Tetapkan nilai awal atau kondisi awal untuk arus, torsi dan kecepatan dan sudut fasa ($ias_0, ibs_0, ics_0, iar_0, ibr_0, icr_0, \theta_0, w_0$).
6. Selanjutnya menghitung/membangkitkan empat data awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk parameter $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n, \theta_n$ (untuk $n=0$ sampai dengan $n=3$). Proses ini bekerja jika $n < 4$.
7. Jika $n \geq 4$, maka hitung data menggunakan metode Gear untuk parameter $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n, \theta_n$. (n merupakan nomor/indek data).
8. Hitung torsi rotor T_e menggunakan Persamaan (35).
9. Hitung variabel waktu t_n dalam detik, $t_n = t_n + h$ (t_n adalah waktu pada data ke n).
10. Simpan nilai $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n, \theta_n, T_e$ dan t_n .
11. Hitung $n=n+1$, tahapan ini bertugas untuk menaikkan nomor/indek data.
12. Kembali ke langkah 7, jika batas simulasi belum tercapai ($n < m$).



Gambar 4. Flowchart Pemrosesan Data Simulator Motor Induksi Tiga Fasa Berbasis Metode Gear



Gambar 5. Flowchart Menghitung $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n$ dan θ_n menggunakan Metode Gear pada Gambar 4

Urutan proses pada Gambar 5 dijelaskan sebagai berikut :

1. Tetapkan/menghitung nilai/data awal dari $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n$, dan θ_n . menggunakan Persamaan (5) dan Persamaan (6) sampai dengan Persamaan (34). Data awal ini merupakan nilai/data prediksi dari nilai/data ke- n dan dihitung berdasarkan empat data sebelumnya.
2. Simpan nilai/data $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n$, dan θ_n ke variabel sementara.
3. Selanjutnya menghitung data/nilai korektor dari $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n$ dan θ_n menggunakan Persamaan (3) dan Persamaan (6) sampai dengan Persamaan (34).
4. Hitung *norm error* dari $ias_n, ibs_n, ics_n, iar_n, ibr_n, icr_n, w_n$, dan θ_n . proses ini merupakan menghitung selisih absolut antara nilai sebelumnya dengan nilai saat ini.

5. Ambil nilai *norm error* terbesar atau *error = error* terbesar dari i_{as_n} , i_{bs_n} , i_{cs_n} , i_{ar_n} , i_{br_n} , i_{cr_n} , w_n , dan θ_{nv} .
6. Jika *error* lebih besar dari batas *error* maka langkah ke 2 sampai dengan 5 diulang terus. Proses ini merupakan proses iterasi Gaus-Jacobi.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini memaparkan hasil simulasi motor induksi dengan menggunakan metode Gear dan ODE15. Waktu simulasi yang diterapkan nol sampai dengan dua detik dengan interval waktu 0,0001 detik dan kriteria *error* pada iterasi Gaus-Jacobi sebesar 0,00001. Motor mulai dibebani ketika waktu lebih dari satu detik. Kondisi tersebut dianggap cukup untuk membandingkan hasil simulasi metode Gear dan ODE15, karena pada saat satu detik motor dapat mencapai keadaan tunak. Kondisi transien yang diamati adalah arus sesaat terbesar dan terkecil serta lama waktu transien. Sedangkan pada kondisi tunak yang diamati adalah arus *peak-to-peak*. Parameter-parameter motor yang digunakan sebagai berikut:

1. Jumlah kutub 2
2. Resistansi belitan Stator 0,3 Ω
3. Resistansi belitan Rotor 0,2 Ω
4. Induktansi bersama/mutual Stator-Rotor 0,035 H
5. Induktansi bocor 0,003 H
6. *Viscous Friction Coefficient* 0,001
7. Momen inersia 0,02 kg m²
8. Torsi beban 40 N-m
9. Tegangan 220 volt (rms)
10. Frekuensi dari tegangan yang diterapkan 60 Hz

4.1 Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-a

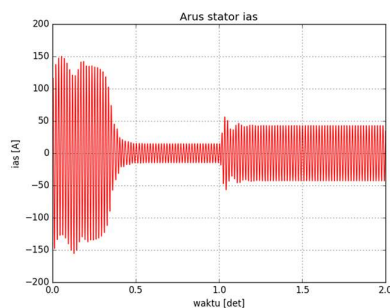
Berdasarkan Gambar 6 dan 7 pada kondisi motor tidak berbeban menunjukkan pola grafik yang relatif identik untuk simulasi menggunakan metode Gear dan ODE15. Hasil perbandingan arus stator fasa-a dengan kondisi motor tidak berbeban dapat dilihat Tabel 2 dengan perbandingan arus sesaatnya sebagai berikut :

1. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat tertinggi 150,22139 amper pada saat 0,0536 detik. Sedangkan ODE15 menghasilkan arus sesaat 150,25926 amper pada saat 0,0536 detik.
2. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terkecil -155,47341 amper pada saat 0,1286 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 -155,64565 amper pada saat 0,0536 detik.
3. Ditinjau dari besarnya arus *peak-to-peak* pada kondisi tunak, simulasi menggunakan metode Gear sebesar 29,77505 amper dan 29,77323 amper untuk ODE15.

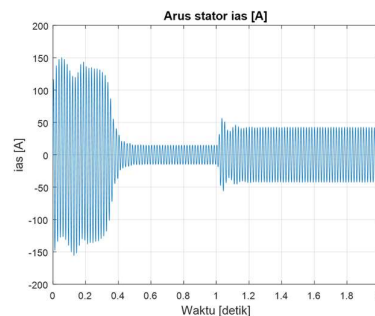
Perbandingan hasil simulasi arus stator fasa-a dengan kondisi motor berbeban, menunjukkan pola grafik yang relatif identik. Hasil perbandingan arus stator fasa-a dengan kondisi motor berbeban dapat dilihat juga pada Tabel 3 dengan perbandingan arus sesaatnya sebagai berikut:

1. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat tertinggi 56,43329 amper pada saat 1,0346 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 56,40591 amper pada saat 1,03460 detik.
2. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terkecil -56,72026 amper pada saat 1,043 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat terkecil -55,88495 amper pada waktu 1,03460 detik.

3. Ditinjau dari besarnya arus *peak-to-peak* pada kondisi tunak, simulasi menggunakan metode Gear sebesar 85,86374 amper dan 85,35201 amper untuk simulasi menggunakan ODE15.



Gambar 6. Grafik Arus Stator Fasa-a Berbasis Metode Gear



Gambar 7. Grafik Arus Stator Fasa-a Berbasis ODE15

Tabel 2. Perbandingan Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-a Kondisi Motor Tidak Berbeban

| No | Variabel | Metode yang digunakan | | selisih absolut [%] |
|----|---|-----------------------|------------|---------------------|
| | | Gear | ODE15 | |
| 1 | Arus sesaat terbesar [A] | 150,22139 | 150,25926 | 0,0252 |
| 2 | Arus sesaat terkecil [A] | -155,47341 | -155,64565 | 0,1107 |
| 3 | Lama waktu transien [detik] | 0,50000 | 0,50000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak [A] | 29,77505 | 29,77323 | 0,0061 |

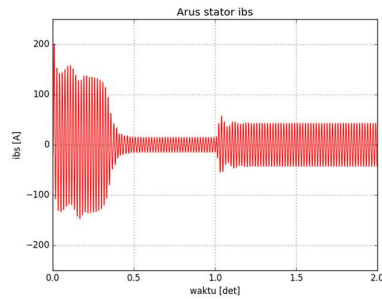
Tabel 3. Perbandingan Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-a Kondisi Motor Berbeban

| No | Variabel | Metode yang digunakan | | selisih absolut [%] |
|----|---|-----------------------|-----------|---------------------|
| | | Gear | ODE15 | |
| 1 | Arus sesaat terbesar [A] | 56,43329 | 56,40591 | 0,0485 |
| 2 | Arus sesaat terkecil [A] | -56,72026 | -55,88495 | 1,4947 |
| 3 | Lama waktu transien [detik] | 1,25000 | 1,25000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak [A] | 85,86374 | 85,35201 | 0,5996 |

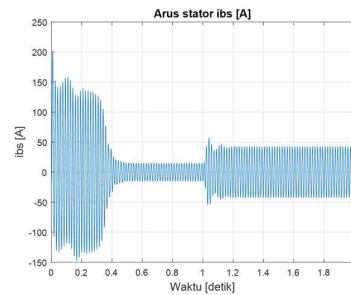
4.2 Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-b

Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 8 dan 9, ditinjau secara visual kedua grafik tersebut dapat dikatakan polanya relatif mirip baik dalam kondisi berbeban maupun kondisi tidak berbeban. Perbandingan hasil simulasi menggunakan metode Gear dan ODE15 untuk kondisi motor tidak berbeban seperti Tabel 4 dan dijelaskan sebagai berikut:

1. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terbesar 200,79026 amper pada waktu 0,0089 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat terbesar 200,78155 amper pada waktu 0,0089 detik.
2. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terkecil 147,29156 amper pada waktu 0,1674 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat tertinggi -148,08988 pada waktu 0,1674 detik.
3. Ditinjau dari besarnya arus *peak-to-peak* pada kondisi tunak, simulasi menggunakan metode Gear memiliki arus *peak-to-peak* sebesar 29,77516 amper dan 29,77328 amper untuk simulasi menggunakan ODE15.



Gambar 8. Grafik Arus Stator Fasa-b Berbasis Metode Gear



Gambar 9. Grafik Arus Stator Fasa-b Berbasis ODE15

Tabel 4. Perbandingan Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-b Kondisi Motor Tidak Berbeban

| No | Variabel | Metode yang digunakan | | selisih absolut [%] |
|----|---|-----------------------|------------|---------------------|
| | | Gear | ODE15 | |
| 1 | Arus sesaat terbesar [A] | 200,79026 | 200,78155 | 0,0043 |
| 2 | Arus sesaat terkecil [A] | -147,29156 | -148,08988 | 0,5391 |
| 3 | Lama waktu transien [detik] | 0,50000 | 0,50000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak [A] | 29,77516 | 29,77328 | 0,0063 |

Perbandingan hasil simulasi arus stator fasa-b dengan kondisi motor berbeban dapat dilihat pada Tabel 5 dengan uraian sebagai berikut :

1. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terbesar 57, 5314 amper pada waktu 1,0402 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat terbesar 57,00639 amper pada waktu 1,0402 detik.
2. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terkecil -54,36661 amper pada waktu 1,0318 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat tertinggi -54,38813 amper pada waktu 1,0318 detik.
3. Ditinjau dari besarnya arus *peak-to-peak* pada kondisi tunak, simulasi menggunakan metode Gear memiliki arus *peak-to-peak* sebesar 85,86116 amper dan 85,35796 amper untuk simulasi menggunakan ODE15.

Tabel 5. Perbandingan Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-b Kondisi Motor Berbeban

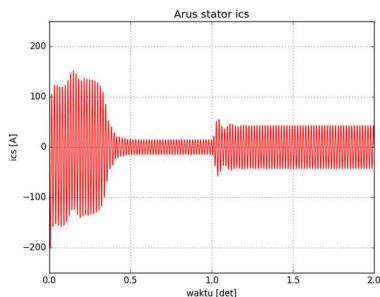
| No | Variabel | Metode yang digunakan | | selisih absolut [%] |
|----|---|-----------------------|-----------|---------------------|
| | | Gear | ODE15 | |
| 1 | Arus sesaat terbesar [A] | 57,53140 | 57,00639 | 0,9210 |
| 2 | Arus sesaat terkecil [A] | -54,36661 | -54,38813 | 0,0396 |
| 3 | Lama waktu transien [detik] | 1,25000 | 1,25000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak [A] | 85,86116 | 85,35796 | 0,5895 |

4.3 Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-c

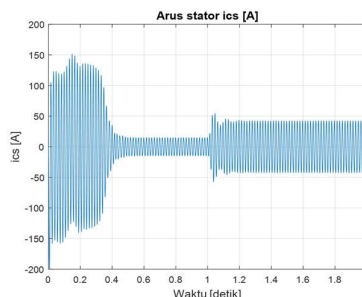
Tabel 6 merupakan hasil perbandingan pada kondisi motor tidak berbeban berdasarkan Gambar 10 dan 11. Ditinjau dari besaraan arus sesaatnya dijelaskan sebagai berikut:

1. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat tertinggi 151,60294 amper pada waktu 0,148 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat terbesar 151,39062 amper pada waktu 0,148 detik.

2. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terkecil -199,48249 amper pada waktu 0,00610 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat tertinggi -199,47845 amper pada waktu 0,0061 detik.
3. Ditinjau dari besarnya arus *peak-to-peak* pada kondisi tunak, simulasi menggunakan metode Gear memiliki arus *peak-to-peak* sebesar 29,77473 amper dan 29,77293 amper untuk simulasi menggunakan ODE15.



Gambar 10. Grafik Arus Stator Fasa-c Berbasis Metode Gear



Gambar 11. Grafik Arus Stator Fasa-c Berbasis ODE15

Tabel 7 merupakan hasil perbandingan pada kondisi motor berbeban berdasarkan Gambar 10 dan 11. Ditinjau dari besaran arus sesaatnya dijelaskan sebagai berikut:

1. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat tertinggi 55,21390 amper pada saat 1,0458 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat terbesar 54,43978 amper pada saat 1,0458 detik
2. Simulasi menggunakan metode Gear menghasilkan arus sesaat terkecil -57,47451 amper pada saat 1,0374 detik. Sedangkan simulasi menggunakan ODE15 menghasilkan arus sesaat tertinggi -57,27368 amper pada waktu 1,0374 detik.
3. Ditinjau dari besarnya arus *peak-to-peak* pada kondisi tunak, simulasi menggunakan metode Gear memiliki arus *peak-to-peak* sebesar 85,86336 amper dan 85,33914 amper untuk simulasi menggunakan ODE15.

Tabel 6. Perbandingan Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-c Kondisi Motor Tidak Berbeban

| No | Variabel | Metode yang digunakan | | selisih absolut [%] |
|----|---|-----------------------|------------|---------------------|
| | | Gear | ODE15 | |
| 1 | Arus sesaat terbesar [A] | 151,60294 | 151,39062 | 0,1402 |
| 2 | Arus sesaat terkecil [A] | -199,48249 | -199,47845 | 0,0020 |
| 3 | Lama waktu transien (detik) | 0,50000 | 0,50000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak [A] | 29,77473 | 29,77293 | 0,0060 |

Tabel 7. Perbandingan Hasil Simulasi Arus Stator Fasa-c Kondisi Motor Berbeban

| No | Variabel | Metode yang digunakan | | selisih absolut [%] |
|----|---|-----------------------|-----------|---------------------|
| | | Gear | ODE15 | |
| 1 | Arus sesaat terbesar [A] | 55,21390 | 54,43978 | 1,4220 |
| 2 | Arus sesaat terkecil [A] | -57,47451 | -57,27368 | 0,3506 |
| 3 | Lama waktu transien [detik] | 1,25000 | 1,25000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak [A] | 85,86336 | 85,33914 | 0,6143 |

4.4 Diskusi Hasil Simulasi Arus Stator

Berdasarkan Tabel 2 sampai dengan 7, diperoleh perbedaan terbesar yaitu berturut-turut 1,4947 % , 0,9210 % dan 1,4220 % masing-masing untuk arus stator fasa-a, fasa-b dan fasa-

c. Selain itu, perbedaan hasil simulasi arus stator antara metode Gear dan ODE15 dapat dilihat seperti Tabel 8. Terjadinya perbedaan hasil simulasi tersebut disebabkan adanya perbedaan nilai data awal yang dibangkitkan dan perbedaan orde dari metode Gear yang digunakan. Perbedaan nilai data awal tersebut dipengaruhi oleh metode penyelesaian persamaan diferensial yang digunakan sehingga menyebabkan nilai *truncation-error* yang berbeda. Berdasarkan Gambar 6 sampai dengan 11, perbedaan rata-rata nilai data awal antara metode ODE15 dan Gear yaitu 0,0016%.

Tabel 8. Perbedaan Hasil Simulasi Arus Stator antara Metode Gear dan ODE15

| No | Variabel | Perbedaan Rata-rata [%] | | | Perbedaan terbesar semua fasa dan kondisi [%] |
|----|---|------------------------------|------------------------|------------------------|---|
| | | Kondisi motor tidak berbeban | Kondisi motor berbeban | Semua fasa dan kondisi | |
| 1 | Arus sesaat terbesar | 0,0566 | 0,7972 | 0,4269 | 1,4220 |
| 2 | Arus sesaat terkecil | 0,2173 | 0,6283 | 0,4228 | 1,4947 |
| 3 | Lama waktu transien | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | Arus <i>peak-to-peak</i> pada kondisi tunak | 0,0061 | 0,6011 | 0,3036 | 0,6143 |

5. KESIMPULAN

Simulator motor induksi tiga fasa yang dibuat dapat menyimulasikan perilaku dinamik motor induksi tiga fasa dengan baik, sesuai hasil simulasi menggunakan modul ODE15 dengan perbedaan 1,5 %, 0,93 % dan 1,5 % secara berturut-turut untuk arus stator fasa-a, arus stator fasa-b dan arus stator fasa-c.

DAFTAR RUJUKAN

- Aleck, W. L. (2017). Simulink/MATLAB Dynamic Induction Motor Model For Use As A Teaching And Research Tool. *International Journal Of Soft Computing And Engineering (IJSCE)*, 3(4), 102-107.
- Bélanger, J., & Paquin, J.-N. (2010). The What, Where And Why of Real-Time Simulation. *Planet Rt*, 1(1), 25-29.
- Boldea, I., Tutelea, L., & Klumpner, C. (2001). Artificial Loading Of Induction Machines: A Review. *In Workshop On Electrical Machines Parameters*, 9-14.
- Boora, S., Agarwal, S., & Sandhu, K. (2013). Dynamic Dq Axis Modeling Of Three-Phase Asynchronous Machine Using Matlab. *International Journal Of Advanced Research In Electrical, Electronics And Instrumentation Engineering*, 2(8), 3942-3951.
- Dorjsuren, Y., Tumenbayar, L., & J.Tsevegmid. (2015). Three-Axis Dynamic Modeling Of Induction Motor. *International Journal Of Mathematical Models and Methods In Applied Sciences*, 9, 527-536.
- Esfandiari, R. S. (2017). *Numerical Methods For Engineers And Scientists Using MATLAB®*. Florida: Crc Press.

- Griffiths, G. W. (2016). *Numerical Analysis Using R*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Kocabas, D. A., Salman, E., & Atalay, A. K. (2011). Analysis Using DQ Transformation Of A Drive System Including Load And Two Identical Induction Motors. *In 2011 IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)* (pp. 1575-1578).
- Kulikov, G. Y. (2013). Cheap Global Error Estimation In Some Runge–Kutta Pairs. *IMA Journal of Numerical Analysis*, *33*(1), 136-163.
- Lyshevski, S. E. (2008). *Ectromechanical Systems And Devices*. Florida: CRC Press.
- Menghal, P. M., & Laxmi, A. J. (2014). Dynamic Modeling, Simulation & Analysis Of Induction Motor Drives. *International Conference on Science Engineering and Management Research (ICSEMR)* (pp. 1-7).
- Mulyono, N., & Septiyanto, D. (2018). Implementasi Pemodelan Arus Dan Putaran Motor Induksi Tiga Fasa Dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat Berbasis Rashberry PI. *Industrial Research Workshop And National Seminar*, *9*, hal. 386-395. Bandung.
- Omale, D., Ojih, P. B., & Ogwo, M. O. (2014). Mathematical Analysis Of Stiff And Non-Stiff Initial Value Problems Of Ordinary Differential Equation Using Matlab. *International Journal Of Scientific & Engineering Research*, 49-59.
- Phukon, L. J., & Baruah, N. (2015). Generalized Matlab Simulink Model Of A Three Phase Induction Motor. *International Journal Of Innovative Research In Science, Engineering And Technology*, *4*(5), 2926-2934.
- Rahmouni, W., & Benasla, L. (2017). Transient Stability Analysis Of The IEEE 39-Bus Power System Using Gear And Block Methods. *In 2017 5th International Conference On Electrical Engineering-Boumerdes (ICEE-B)* (pp. 1-6).
- Rath, G., Harker, M., & ZaeV, E. (2017). Direct Numerical Solution Of Stiff ODE Systems In Optimal Control. *In 2017 6th Mediterranean Conference On Embedded Computing (MECO)* (pp. 1-5).
- Shampine, L. F., & Reichhel, M. W. (1997). The Matlab Ode Suite. *SIAM Journal On Scientific Computing*, *18*(1), 1-22.
- Shampine, L. F., Watfs, H. A., & Davenport, S. M. (1979). Solving Nonstiff Ordinary Differential Equations—The State of The Art. *SIAM Journal On Scientific Computing*, *18*(3), 376-411.