

Deteksi Sinyal : *Overview* Model Parametrik menggunakan Kriteria Neyman-Pearson

FIKY YOSEF SURATMAN, ALOYSIUS ADYA PRAMUDITA, DHARU ARSENO

School of Electrical Engineering Telkom University
Email: fysuratman@telkomuniversity.ac.id

Received 11 September 2018 | *Revised* 26 September 2018 | *Accepted* 20 Oktober 2018

ABSTRAK

Deteksi sinyal banyak diimplementasikan dalam sistem pengolahan sinyal yang sangat kompleks. Sebagai contoh digunakan pada sub sistem pengolahan sinyal radar pengintai yang berfungsi untuk deteksi dan pelacakan target. Salah satu implementasi terbaru dari deteksi sinyal adalah untuk fungsi spectrum sensing pada Cognitive Radio. Deteksi sinyal dapat didefinisikan sebagai binary hypothesis testing, yaitu memutuskan satu dari dua keadaan: hanya derau atau tidak ada sinyal (null hypothesis), dan ada sinyal (alternative hypothesis). Teori deteksi sinyal merupakan bidang yang cukup luas, sehingga paper ini fokus pada pendekatan parametrik dengan Teorema Neyman-Pearson. Kedua hypothesis dimodelkan dengan variabel acak dengan distribusi rapat kemungkinan yang sama tetapi mempunyai parameter yang berbeda. Ditunjukkan penurunan test statistic untuk dua skenario, yaitu distribusi dengan diketahui sebagian dan diketahui penuh. Bagian simulasi menunjukkan kinerja detektor sinyal secara analitis mempunyai hasil yang serupa dengan simulasi Monte Carlo.

Kata kunci: *deteksi sinyal, Neyman-Pearson, hypothesis testing, spectrum sensing, radar.*

ABSTRACT

Signal detection has been used in many sophisticated signal processing systems, such as for signal processing in surveillance radar which is to detect and to track a radar target. Recently, signal detection is widely used for spectrum sensing in Cognitive Radio. Signal detection is a binary hypothesis testing problem which is to choose one out of two conditions, i.e., noise only or signal absence (null hypothesis), and signal presence (alternative hypothesis). Since signal detection theory is a wide area, this paper only focuses on parametric approach using Neyman-Pearson theorem. The two hypotheses are modeled by random variables having the same distribution but different parameters. The derivations of test statistics (detectors) are shown for two scenarios, i.e., partially known and perfectly known distributions. Analytical results and Monte Carlo simulations of the derived detectors show similar performances.

Keywords: *signal detection, Neyman-Pearson, hypothesis testing, spectrum sensing, radar.*

1. PENDAHULUAN

Teori deteksi sinyal memiliki peran yang fundamental dalam desain sistem pengolahan sinyal untuk membuat keputusan maupun ekstraksi informasi seperti pada Radar, Sonar, Sistem Komunikasi, *Speech*, *Image Processing*, *Biomedicine*, *Control* dan *Seismology* (Kay, 1998). Sistem-sistem tersebut memiliki kesamaan tujuan, yaitu membuat keputusan (*decision making*) ketika sebuah *event of interest* terjadi, dan kemudian menentukan informasi lebih jauh tentang *event* tersebut. *Decision making*, merupakan fokus utama yang dibahas pada paper ini, yang secara luas biasa disebut dengan teori deteksi (*detection theory*). Dalam hal ini *event of interest* adalah keberadaan sinyal informasi, sehingga disebut dengan teori deteksi sinyal (*signal detection theory*).

Contoh penerapan deteksi sinyal adalah pada radar pengintai dalam menentukan ada atau tidaknya target pesawat yang sedang terbang pada jarak tertentu. Untuk mencapai tujuan tersebut, radar mentransmisikan pulsa elektromagnetik yang dapat dipantulkan kembali (*echo*) dan kemudian diterima oleh perangkat penerima radar (Richards, 2014). Jika target pesawat ada, sinyal terima pada radar terdiri dari sinyal *echo* dan derau akibat radiasi sekitar dan perangkat elektronik penerima. Sebaliknya, jika tidak ada target maka hanya derau yang ada pada perangkat penerima radar. Oleh sebab itu, penerima radar membutuhkan perangkat detektor sinyal untuk memutuskan salah satu dari dua keadaan tersebut.

Aplikasi terkini yang membutuhkan penerapan deteksi sinyal adalah *spectrum sensing* pada *Cognitive Radio* (CR), atau lebih tepatnya disebut *Dynamic Spectrum Access* (DSA). DSA dianggap sebagai solusi dimasa depan untuk meningkatkan utilisasi *spectrum band nirkabel* yang saat ini cukup rendah akibat manajemen spektrum dengan *command and control* model (Hossain, 2009). Pada konsep DSA, *Primary User* (PU) sebagai pemegang lisensi penggunaan spektrum mempunyai prioritas tertinggi dalam menggunakan sebuah *spectrum band*, sedangkan *Secondary User* (SU) yang tak berlisensi dapat menggunakan *spectrum band* apabila tidak sedang digunakan oleh PU. Oleh sebab itu SU memerlukan fungsi *spectrum sensing* untuk mengetahui apakah sebuah *spectrum band* sedang digunakan oleh PU atau tidak (Axell, 2012). SU akan menerima sinyal transmisi dari PU plus derau saat sebuah *spectrum band* sedang dipakai, sedangkan derau saja saat *spectrum band* tidak sedang dipakai oleh *Primary User*.

Paper ini tidak ditujukan untuk memberikan kebaruan dalam teori deteksi sinyal. Tetapi dapat dijadikan sebagai *overview* atau pengenalan teori deteksi sinyal dengan pendekatan parametrik menggunakan teorema Neyman-Pearson. Materi pada paper dapat digunakan oleh para mahasiswa/peneliti yang mempunyai ketertarikan riset pada pengolahan sinyal radar maupun komunikasi nirkabel. Paper ini juga diharapkan dapat menjadi solusi bagi para mahasiswa/peneliti yang mengalami kesulitan untuk menterjemahkan aspek teoritis deteksi sinyal ke dalam algoritma perangkat lunak baik untuk implementasi maupun simulasi. Paper dilengkapi lampiran secara terpisah sebagai suplemen yang dapat diminta melalui email ke penulis pertama.

2. VARIABEL ACAK

Konsep mengenai variabel acak sangat penting dalam teori deteksi sinyal, khususnya untuk metode yang menggunakan model parametrik. Pada bagian ini akan dijelaskan secara singkat konsep variabel acak terutama yang berhubungan dengan fungsi distribusi.

Variabel acak (*random variable*) adalah fungsi yang memetakan luaran dari eksperimen acak ke bilangan real (**Garcia, 1994**). Dalam kasus deteksi sinyal, setiap sampel dari sinyal yang diobservasi adalah sebuah variabel acak. Sebagai contoh, jika sebuah penerima melakukan observasi dengan melakukan *sampling* sebanyak N sampel yang dinyatakan dengan sebuah urutan sampel acak x_N , dimana :

$$x_N = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N - 1)],$$

maka setiap sampel $x(i)$ dapat dianggap sebuah realisasi dari sebuah variabel acak X . Karena $x(i)$ kontinu pada rentang $-\infty < x(i) < \infty$, X adalah variabel acak kontinu.

Hal yang paling penting dalam karakterisasi variabel acak adalah menentukan probabilitas harga-harga yang mungkin diambil oleh variabel acak tersebut. Pada variabel acak kontinu, probabilitas tersebut dinyatakan dengan fungsi distribusi kumulatif atau disebut *Cumulative Distribution Function* (CDF). CDF $F(x)$ dari sebuah variabel acak X dapat didefinisikan sebagai probabilitas kejadian $\{X \leq x\}$, secara formal dapat dituliskan sebagai fungsi berikut :

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (1)$$

dimana $P(A)$ menyatakan probabilitas kejadian A . Fungsi lain sebagai alternatif untuk karakterisasi sebuah variabel acak adalah fungsi rapat kemungkinan, atau *Probability Density Function* (PDF), yang didefinisikan sebagai turunan dari CDF.

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2)$$

PDF menyatakan kemungkinan variabel acak X berada pada interval di sekitar x , yaitu $x < X \leq x + h$, dimana h sangat kecil. Sehingga, untuk menyatakan bahwa probabilitas sebuah sampel dari sinyal observasi mempunyai harga pada rentang (a, b) dapat dinyatakan dengan Persamaan (3).

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

PDF untuk sebuah urutan acak x_N yang melibatkan sejumlah N variabel acak disebut *joint Probability Density Function* (*joint PDF*) yang dinyatakan dengan simbol $p(x_N)$. Untuk kasus dimana antar sampel bebas (*independent*), *joint PDF* merupakan perkalian masing-masing (*marginal*) PDF dari setiap variabel acak sampel, yaitu :

$$p(x_N) = p_X(x(0))p_X(x(1)) \dots p_X(x(N)) \quad (4)$$

Contoh PDF yang sering dipergunakan adalah PDF Gaussian (biasa disebut juga PDF normal). PDF Gaussian untuk variabel acak X didefinisikan sebagai Persamaan (5).

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right], \quad (5)$$

yang ditentukan oleh dua parameter yaitu *mean* μ dan variansi σ^2 . Pada paper ini akan digunakan simbol seperti pada Persamaan (6).

$$x \sim N(\mu, \sigma^2), \quad (6)$$

Untuk menyatakan bahwa variabel acak X terdistribusi (PDF) Gaussian dengan *mean* μ dan variansi σ^2 . Berdasarkan Persamaan (4), *joint* PDF urutan acak x_N dengan masing-masing sampel $x(i)$ terdistribusi Gaussian dengan parameter *mean* dan variansi yang sama, $x(i) \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, N$, dan saling bebas antar sampel dapat dinyatakan dengan Persamaan (7).

$$p(x_N; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (x(i) - \mu)^2 \right]. \quad (7)$$

3. TEORI DETEKSI SINYAL DENGAN MODEL PARAMETRIK

3.1 Binary Hypothesis Testing

Metode statistik yang paling fundamental dalam teori deteksi sinyal adalah *hypothesis testing* (Poor, 1988). Untuk memahami *hypothesis testing*, ada baiknya meninjau sebuah contoh kasus deteksi sinyal pada radar pengintai (*surveillance radar*) (Richard, 2014). Sistem radar pengintai dirancang untuk menentukan ada tidaknya target pesawat pada daerah jangkauan radar. Untuk mencapai tujuan tersebut antena pengirim radar mengirimkan gelombang elektromagnetik yang kemudian akan dipantulkan kembali (sinyal *echo*) sebagian menuju antena penerima radar apabila ada target pesawat yang bergerak. Pada kondisi tersebut, antena penerima radar tidak hanya menerima sinyal *echo* tetapi ditambah dengan derau (*noise*) yang pasti ada di setiap perangkat penerima. Sedangkan saat tidak ada target maka radar hanya akan mendeteksi derau. Pada kasus radar tersebut terdapat dua *hypothesis*, yaitu saat target tidak ada (derau saja) dan saat target ada (sinyal *echo* dan derau). Kedua *hypothesis* tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0: & \text{Target tidak ada (derau)} \\ H_1: & \text{Target ada (sinyal } echo + \text{ derau),} \end{aligned}$$

Dimana H_0 disebut dengan *null hypothesis* dan H_1 disebut dengan *alternative hypothesis*. Karena terdapat dua kondisi (*binary*) yang akan dipilih, masalah deteksi sinyal disebut juga *binary hypothesis testing*. Lebih jauh, jika sebuah penerima melakukan observasi dengan melakukan *sampling* sebanyak N sampel yang dinyatakan dengan sebuah urutan sampel acak $x_N = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]$, maka kedua *hypothesis* dapat dituliskan juga sebagai Persamaan (8).

$$\begin{aligned} H_0: & x(n) = w(n) \\ H_1: & x(n) = s(n) + w(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (8)$$

Dimana $x(n)$ menyatakan sinyal yang diterima oleh antena penerima, $s(n)$ adalah sinyal *echo* dan $w(n)$ adalah derau. Berdasarkan sinyal terima $x(n)$ maka pendeteksi sinyal (detektor) akan menentukan apakah $x(n)$ mengandung $s(n)$ atau tidak.

Jika diasumsikan bahwa data x_N berasal dari distribusi (PDF) tertentu, **model parametrik** dapat digunakan pada deteksi sinyal. Pada kasus ini, sensor atau antena diasumsikan menerima sinyal acak yang mengikuti famili distribusi yang sama dan dapat didefinisikan dengan menggunakan sejumlah parameter distribusi yang terbatas (*finite*), baik pada *null hypothesis* H_0 maupun pada *alternative hypothesis* H_1 . Sehingga, masalah *binary hypothesis testing* pada model parametrik secara formal dapat dinyatakan dengan Persamaan (9).

$$\begin{aligned} H_0: & p_0(x_N; \theta_0) \\ H_1: & p_1(x_N; \theta_1) \end{aligned} \quad (9)$$

Dimana $p_i(x_N; \theta_i)$ menyatakan *joint* PDF dari x_N saat $H_i, i = 0,1$, dengan parameter $\theta_i, i = 0,1$. Untuk kasus *joint* PDF Gaussian, maka $p_i(x_N; \theta_i)$ mengikuti persamaan (7), dimana *mean* dan variansi (μ_i, σ_i^2) adalah fungsi dari parameter θ_i .

Pada beberapa aplikasi, x_N tidak dapat diasumsikan berasal dari distribusi tertentu sehingga **model non-parametrik** untuk *binary hypothesis testing* harus digunakan. Deteksi sinyal model non-parametrik di luar cakupan paper ini, dan pembaca dapat mengacu pada **(Gibson, 1996)**.

Berdasarkan sinyal yang diterima, detektor akan membuat keputusan (*decision*) $D_i, i = 0,1$, di antara dua *hypothesis* yang ada. Dalam membuat keputusan tersebut ada empat kondisi yang mungkin terjadi seperti yang terlihat pada Tabel 1. Keputusan dapat berarti betul (sesuai dengan kenyataan), dan dapat berarti salah (tidak sesuai dengan kenyataan).

Tabel 1. Empat Kondisi yang Mungkin saat Detektor Memutuskan

Kenyataan	Keputusan	
	Tidak ada sinyal (D_0)	Ada sinyal (D_1)
Tidak ada sinyal (H_0 true)	Keputusan betul dengan probabilitas $P(D_0/H_0)$	Keputusan salah (<i>false alarm</i>) dengan probabilitas $P(D_1/H_0)$
Ada sinyal (H_1 true)	Keputusan salah (<i>miss detection</i>) dengan probabilitas $P(D_0/H_1)$	Keputusan betul dengan probabilitas $P(D_1/H_1)$

Ukuran kinerja dari detektor biasanya dinyatakan dengan probabilitas kondisi masing-masing akan terjadi yaitu: $P(D_0/H_0), P(D_1/H_0), P(D_0/H_1)$, dan $P(D_1/H_1)$, dimana $P(D_0/H_0) + P(D_1/H_0) = 1$ dan $P(D_0/H_1) + P(D_1/H_1) = 1$.

3.2 Detektor Sinyal

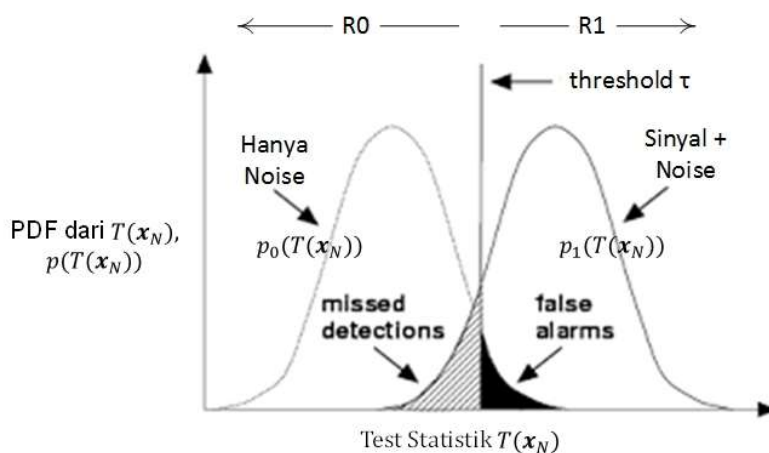
Terdapat banyak pendekatan yang dapat dipilih untuk menentukan detektor sinyal pada *binary hypothesis testing*. Dua di antaranya yang populer pada model parametrik adalah menggunakan kriteria Bayes (*Bayes criterion*) dan kriteria Neyman-Pearson (*Neyman-Pearson Criterion*) **(Poor, 1988)**. Dengan pertimbangan bahwa kriteria Neyman-Pearson (NP) lebih banyak digunakan dibanding kriteria Bayes pada konsep deteksi sinyal radar dan *spectrum sensing*, maka fokus dari paper ini adalah penentuan detektor sinyal menggunakan kriteria NP. Selain itu kesulitan dalam menentukan *cost-function* yang sesuai dengan skenario yang ada dan tidak diketahuinya probabilitas a-priori (*a-priori probability*) untuk kemunculan sinyal, menjadi alasan mengapa kriteria Bayes relatif jarang digunakan dibanding kriteria NP **(Kay, 1998)**.

Kriteria Neyman-Pearson

Jika diasumsikan penerima melakukan observasi dengan melakukan *sampling* urutan acak $x_N = [x(0) x(1) \dots x(N - 1)]$ dan $T(x_N)$ adalah *test statistic* yang merupakan fungsi dari data hasil *sampling* x_N , maka detektor generik dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$T(x_N) \begin{cases} > \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (10)$$

Dimana τ menyatakan *threshold* yang memisahkan daerah keputusan R_0 (terima H_0) dan R_1 (terima H_1). Karena $T(x_N)$ adalah fungsi dari variabel-variabel acak sampel, maka $T(x_N)$ juga merupakan variabel acak yang mempunyai PDF.



Gambar 1. PDF dari Test Statistic

Mengacu pada Gambar 1, kemungkinan untuk membuat *error* dalam memutuskan seperti pada Tabel 1, dapat didefinisikan kembali sebagai berikut:

Probability of False Alarm

$$P_f = P(D_1/H_0) = P(T(x_N) > \tau/H_0) = \int_{\tau}^{\infty} p(T(x_N)/H_0) dT(x_N) \quad (11)$$

Probability of missed detection

$$P_m = P(D_0/H_1) = P(T(x_N) < \tau/H_1) = \int_{\tau}^{\infty} p(T(x_N)/H_1) dT(x_N). \quad (12)$$

Sebagai catatan, tidak mungkin untuk mengurangi kedua *error* pada Persamaan (11) dan (12) secara bersamaan. Oleh sebab itu, untuk mendapatkan detektor sinyal yang optimal, pendekatan yang logis adalah membuat satu probabilitas *error* tetap dan meminimalkan probabilitas *error* yang lain.

Dalam paper ini ukuran kinerja yang digunakan adalah *probability of false alarm* dan *probability of detection* (P_d), dimana

$$P_d = 1 - P_m = \int_{\tau}^{\infty} p(T(x_N)/H_1) dT(x_N) \quad (13)$$

Kriteria NP menyatakan bahwa sebuah detektor optimal jika *test statistic* $T(x_N)$ dan *threshold* τ dipilih sehingga *probability of missed detection* P_m minimum (*probability of detection* maksimum) dengan memberikan batasan *probability of false alarm* P_f ditetapkan sebelumnya sama dengan harga nominal tertentu $P_f = \alpha$. Dengan menggunakan pendekatan *Lagrange*

Multiplier sebagai solusi permasalahan optimasi, maka diperoleh bahwa *test statistic* untuk *binary hypothesis testing* pada persamaan (8) adalah *likelihood ratio* (Kay, 1998).

$$T(\mathbf{x}_N) = \frac{p_1(\mathbf{x}_N; \boldsymbol{\theta}_1)}{p_0(\mathbf{x}_N; \boldsymbol{\theta}_0)} \begin{cases} > \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (14)$$

Dimana *threshold* τ ditentukan dari Persamaan (15).

$$P_f = \int_{\tau}^{\infty} p(T(\mathbf{x}_N)/H_0) dT(\mathbf{x}_N) = \alpha. \quad (15)$$

Detail penurunan menggunakan *Lagrange Multiplier* dapat dilihat di (Kay, 1998) untuk kasus satu detektor dan (Varshney, 1997) untuk banyak detektor.

Terdapat dua kasus umum pada metode deteksi sinyal dengan model parametrik. Jika parameter distribusi, yaitu θ_0 , θ_1 atau keduanya diketahui maka disebut dengan *simple hypothesis*. Desain detektor sinyal menjadi lebih sulit ketika PDF mempunyai parameter yang tidak diketahui (*unknown parameter*). Kasus terakhir ini disebut dengan *composite hypothesis*. Bagian 4, Contoh Kasus Deteksi Sinyal, akan memberikan gambaran untuk memahami lebih lanjut kedua kasus tersebut.

Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT)

Pada bagian sebelumnya, ketika menurunkan detektor optimal telah diasumsikan bahwa masing-masing PDF saat tidak ada sinyal (H_0) dan ada sinyal (H_1) diketahui secara menyeluruh (*completely known*). Dalam kenyataannya pendekatan tersebut bisa jadi tidak praktis, dimana satu atau lebih parameter distribusi tidak diketahui. Sebagai contoh pada deteksi target oleh radar, daya sinyal *echo* yang dipantulkan target dan diterima radar biasanya tidak diketahui. Demikian juga ketika derau diasumsikan terdistribusi Gaussian, tetapi variansi atau daya derau sulit untuk diketahui. Dengan kata lain, baik *null* maupun *alternative hypothesis* kedua-duanya termasuk kategori *composite hypothesis*. Oleh sebab itu, menjadi hal yang penting untuk mendesain detektor yang baik ketika PDF saat tidak ada sinyal (H_0) dan ada sinyal (H_1) tidak diketahui secara menyeluruh (*incompletely known*). Pada kasus ini, harus dilakukan pendekatan sub-optimum.

Salah satu pendekatan yang paling populer untuk *composite hypotheses testing* adalah *Generalized Likelihood Ratio Test* (GLRT). Konsep dari GLRT adalah mengganti semua parameter distribusi yang tidak diketahui dengan hasil estimasi masing-masing parameter tersebut menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) (Kay, 1993). Secara umum, GLRT mempunyai bentuk seperti pada Persamaan (16).

$$T(\mathbf{x}_N) = \frac{p_1(\mathbf{x}_N; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{p_0(\mathbf{x}_N; \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \begin{cases} > \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (16)$$

Dimana $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ adalah MLE untuk parameter $\boldsymbol{\theta}_0$ dengan asumsi H_0 adalah betul terjadi (*true*), sedangkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ adalah MLE untuk parameter $\boldsymbol{\theta}_1$ dengan asumsi H_1 adalah betul terjadi. MLE secara formal diperoleh dari Persamaan (17).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_i} \ln(p_i(\mathbf{x}_N; \boldsymbol{\theta}_i)). \quad (17)$$

Threshold τ ditentukan berdasarkan nominal *probability of false alarm* yang diinginkan $P_f = \alpha$, seperti pada Persamaan (15).

4. CONTOH KASUS DETEKSI SINYAL

Pada bagian ini akan diberikan dua contoh cara untuk mendesain detektor dengan menggunakan pendekatan kriteria NP. Kasus pertama adalah jika distribusi diketahui secara menyeluruh (*completely known*) dan pada kasus kedua distribusi diketahui sebagian (*partially known*).

Dimisalkan terdapat permasalahan deteksi sinyal DC dengan amplitudo A pada derau *Additive White Gaussian Noise* (AWGN) yang dapat dituliskan pada Persamaan (18).

$$\begin{aligned} H_0: x(n) &= w(n) \\ H_1: x(n) &= A + w(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (18)$$

Dimana $w(n)$ adalah terdistribusi Gaussian dengan *mean* dan variansi berturut-turut μ dan σ^2 .

Distribusi Diketahui

Pada contoh ini diasumsikan amplitudo A , dimana $A > 0$, dan variansi derau σ^2 keduanya diketahui. Sehingga pada saat tidak ada sinyal $x(n)$ akan terdistribusi Gaussian dengan *mean* $\mu = A = 0$ dan variansi σ^2 , sedangkan pada saat ada sinyal, $x(n)$ akan terdistribusi Gaussian juga dengan *mean* $\mu = A > 0$ dan variansi σ^2 . Permasalahan *binary hypothesis* menjadi :

$$\begin{aligned} H_0: x &\sim N(0, \sigma^2) \\ H_1: x &\sim N(A, \sigma^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Persamaan (19) menyatakan bahwa saat tidak ada sinyal (H_0) maka parameter distribusi θ_0 diketahui, yaitu $\{\mu = 0, \sigma^2\}$, dan pada saat ada sinyal (H_1) maka parameter distribusi θ_1 diketahui yaitu $\{\mu = A, \sigma^2\}$. Sehingga *null* dan *alternative hypothesis* termasuk kategori *simple hypothesis* (**Poor, 1988**).

Berdasarkan Persamaan (7) dan (14), dan menggunakan pendekatan kriteria NP, maka diperoleh *likelihood ratio* pada Persamaan (20).

$$\frac{p_1(\mathbf{x}_N; \theta_1)}{p_0(\mathbf{x}_N; \theta_0)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (x(i) - A)^2\right]}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i)\right]} \begin{cases} > \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (20)$$

Dengan mengambil logaritmik kedua sisi Persamaan (20) maka akan diperoleh Persamaan (21).

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left(-2A \sum_{i=0}^{N-1} x(i) + NA^2 \right) \begin{cases} > \ln \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \ln \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (21)$$

Selanjutnya Persamaan (21) dapat disederhanakan menjadi Persamaan (22).

$$-\frac{A}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \begin{cases} > \ln \tau + \frac{NA^2}{2\sigma^2}, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \ln \tau + \frac{NA^2}{2\sigma^2}, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (22)$$

Karena asumsi A positif, maka dari Persamaan (22) akan diperoleh Persamaan (23).

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \begin{cases} > \tau', & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau', & \text{Terima } H_0 (D_0)' \end{cases} \quad (23)$$

dimana *threshold* dinyatakan dengan Persamaan (24).

$$\tau' = \frac{\sigma^2}{NA} \ln \tau + \frac{A}{2}. \quad (24)$$

Detektor pada Persamaan (23) adalah detektor optimal untuk masalah *binary hypothesis testing* Persamaan (19). Optimal mempunyai pengertian untuk P_f yang sama, tidak ada detektor lain yang akan menghasilkan P_d yang lebih besar dari detektor pada Persamaan (23).

Dari persamaan (23) maka detektor membandingkan rata-rata sampel (*sample mean*) \bar{x} dengan *threshold* τ' . Hal ini cukup logis karena PDF pada kedua *hypothesis* berbeda hanya pada *mean* (0 dan A), dan \bar{x} dapat dianggap sebagai estimator dari A . Jika hasil estimasi \bar{x} besar dan positif maka sinyal DC kemungkinan besar ada. Besarnya harga hasil estimasi ketika memutuskan ada sinyal akan tergantung pada seberapa besar perhatian kita terhadap kemungkinan derau menghasilkan energi cukup besar yang akan menyebabkan keputusan salah (*false alarm*). Oleh sebab itu diperlukan mengatur *threshold* τ' sehingga *probability of false alarm* P_f dapat dikontrol. *Threshold* yang lebih besar akan menghasilkan P_f yang lebih kecil, tetapi secara bersamaan akan memperkecil *probability of detection* P_d . Sehingga harus dicari hubungan antara P_d terhadap P_f , yang disebut dengan kurva *Receiver Operating Characteristics* (ROC). ROC merupakan kurva yang sering digunakan untuk memperlihatkan dan membandingkan kinerja detektor.

Untuk menurunkan kinerja detektor secara analitis, diperlukan distribusi *test statistic* $T(\mathbf{x}_N) = \bar{x}$ saat tidak ada sinyal H_0 maupun ada sinyal H_1 . Karena $x(i), i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ masing masing terdistribusi Gaussian dengan *mean* dan variansi yang sama, maka $T(\mathbf{x}_N)$ yang merupakan penjumlahan variabel acak tersebut akan terdistribusi Gaussian saat H_0 dan H_1 . *Mean* dan variansi dari distribusi $T(\mathbf{x}_N)$ saat H_0 dan H_1 harus ditentukan.

Saat tidak ada sinyal H_0 , maka *mean* μ_0 ditentukan dengan Persamaan (25)

$$\mu_0 = E_0\{T(\mathbf{x}_N)\} = E_0\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} E_0\{w(i)\} = 0. \quad (25)$$

Sedangkan saat ada sinyal H_1 , *mean* μ_1 dapat ditentukan dengan Persamaan (26).

$$\mu_1 = E_1\{T(\mathbf{x}_N)\} = E_1\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\right\} = E_1\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} w(i)\right\} + E_1\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A\right\} = A, \quad (26)$$

Dimana $E_i\{\cdot\}$ menyatakan ekspektasi dari variabel acak saat H_i dan asumsi sampel-sampel dari derau independen. Sedangkan variansi saat tidak ada sinyal σ_0^2 ,

$$\sigma_0^2 = \text{var}\{T(\mathbf{x}_N)\} = \text{var}\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\right\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \text{var}\{w(i)\} = \frac{\sigma^2}{N} \quad (27)$$

Saat ada sinyal :

$$\sigma_1^2 = \text{var}\{T(\mathbf{x}_N)\} = \text{var}\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\right\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \text{var}\{A\} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \text{var}\{w(i)\} = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (28)$$

Oleh sebab itu, maka distribusi *test statistic* $T(\mathbf{x}_N)$ dapat dinyatakan dengan Persamaan (29).

$$T(\mathbf{x}_N) \begin{cases} N\left(0, \frac{\sigma^2}{N}\right) \text{ saat } H_0 \\ N\left(A, \frac{\sigma^2}{N}\right) \text{ saat } H_1 \end{cases}. \quad (29)$$

Dengan demikian *probability of false alarm* P_f dihitung dari distribusi $T(\mathbf{x}_N)$ saat tidak ada sinyal dinyatakan dengan Persamaan (30).

$$P_f = P_0(T(\mathbf{x}_N) > \tau') = \int_{\tau'}^{\infty} p_0(T(\mathbf{x}_N)) dT(\mathbf{x}_N) = Q\left(\frac{\tau'}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right), \quad (30)$$

Dimana fungsi $Q(\cdot)$ adalah *Complementary Cumulative Distribution Function* (CCDF) untuk distribusi normal $N(0,1)$ dinyatakan dengan Persamaan (31).

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right). \quad (31)$$

Sedangkan untuk menentukan *probability of detection* P_d dihitung dari distribusi $T(\mathbf{x}_N)$ saat ada sinyal menggunakan Persamaan (32).

$$P_d = P_1(T(\mathbf{x}_N) > \tau') = \int_{\tau'}^{\infty} p_1(T(\mathbf{x}_N)) dT(\mathbf{x}_N) = Q\left(\frac{\tau' - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right). \quad (32)$$

Hubungan antara P_d dan P_f dapat ditentukan dari Persamaan (29) dan (31). Karena fungsi Q adalah monoton turun, maka fungsi Q mempunyai *inverse* yang disimbolkan dengan Q^{-1} .

Berdasarkan Persamaan (30), *threshold* dapat ditentukan dengan Persamaan (33).

$$\tau' = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} Q^{-1}(P_f), \quad (33)$$

Setelah disubstitusi ke Persamaan (32), maka akan diperoleh Persamaan (34).

$$P_d = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} Q^{-1}(P_f) - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right) = Q\left(Q^{-1}(P_f) - \sqrt{\frac{NA^2}{\sigma^2}}\right). \quad (34)$$

Persamaan (34) menyatakan hubungan antara P_d dan P_f (kurva ROC). Sebagai catatan, penurunan kinerja detektor dengan kurva ROC secara analitis tidak selalu dapat dilakukan. Hal ini tergantung apakah bentuk tertutup (*closed form*) PDF dari *test statistic* dapat ditentukan atau tidak, baik secara eksak ataupun *asymptotic* menggunakan *central limit theorem* (**Serfling, 2009**). Apabila PDF tidak dapat ditentukan secara tertutup maka kinerja detektor dapat dievaluasi dengan cara simulasi Monte Carlo (**Suratman, 2010**).

Distribusi Diketahui Sebagian

Selanjutnya, akan dipertimbangkan masalah *binary hypothesis testing* pada Persamaan (19) dengan kondisi dimana amplitudo $A \neq 0$ dan tidak diketahui, sedangkan variansi *noise* σ^2 diketahui. Permasalahan ini dapat dipecahkan dengan GLRT, dimana amplitudo A harus diestimasi terlebih dahulu dengan menggunakan MLE.

Berdasarkan Persamaan (17) MLE dari amplitudo A adalah dengan memaksimalkan fungsi *log-likelihood* PDF saat ada sinyal H_1 , sehingga diperoleh Persamaan (35).

$$\ln p_1(\mathbf{x}_N; A) = \ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (x(i) - A)^2\right]\right). \quad (35)$$

Harga A yang memaksimalkan fungsi Persamaan (35) dapat dicari dengan menurunkan fungsi tersebut terhadap A dan ditentukan sama dengan nol, seperti pada Persamaan (36).

$$\frac{\partial \ln p_1(\mathbf{x}_N; A)}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (x(i) - A) = 0, \quad (36)$$

Maka \hat{A} sebagai MLE dari parameter A akan diperoleh sama dengan *mean* sampel \bar{x} melalui Persamaan (37).

$$\hat{A} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i). \quad (37)$$

Kita tidak perlu melakukan estimasi parameter dari PDF saat tidak ada sinyal H_0 , karena semua parameter distribusi telah diketahui yaitu $\mu = 0$ dan variansi σ^2 .

Selanjutnya detektor dicari dengan menggunakan GLRT, yaitu menggunakan Persamaan (38).

$$\frac{p_1(\mathbf{x}_N; \hat{A})}{p_0(\mathbf{x}_N)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (x(i) - \bar{x})^2\right]}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i)\right]} \begin{cases} > \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (38)$$

Dengan menerapkan logaritma pada kedua sisi Persamaan (38) maka akan diperoleh Persamaan (39).

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) - 2\bar{x} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) + N\bar{x}^2 - \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) \right) \begin{cases} > \ln \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \ln \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (39)$$

Setelah dilakukan penyederhanaan terhadap Persamaan (39) akan diperoleh Persamaan (40).

$$-\frac{1}{2\sigma^2} (-2N\bar{x}^2 + N\bar{x}^2) \begin{cases} > \ln \tau, & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \ln \tau, & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (40)$$

Sehingga, *test statistic* dapat dituliskan sebagai Persamaan (41).

$$T(\mathbf{x}_N) = \bar{x}^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \right)^2 \begin{cases} > \tau', & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau', & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (41)$$

Dimana $\tau' = \frac{2\sigma^2}{N} \ln \tau$. *Test statistic* $T(\mathbf{x}_N)$, dapat juga dituliskan sebagai Persamaan (42).

$$T(\mathbf{x}_N) = |\bar{x}| = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \right| \begin{cases} > \tau', & \text{Terima } H_1 (D_1) \\ < \tau', & \text{Terima } H_0 (D_0) \end{cases} \quad (42)$$

Distribusi (PDF) dari *test statistic* $T(\mathbf{x}_N)$ saat tidak ada sinyal H_0 dan ada sinyal H_1 dapat diturunkan, seperti yang telah dicontohkan pada kasus distribusi diketahui seluruhnya. Berdasarkan kedua distribusi tersebut, akan diperoleh persamaan kurva ROC secara analitis menggunakan Persamaan (43) (**Kay, 1998**).

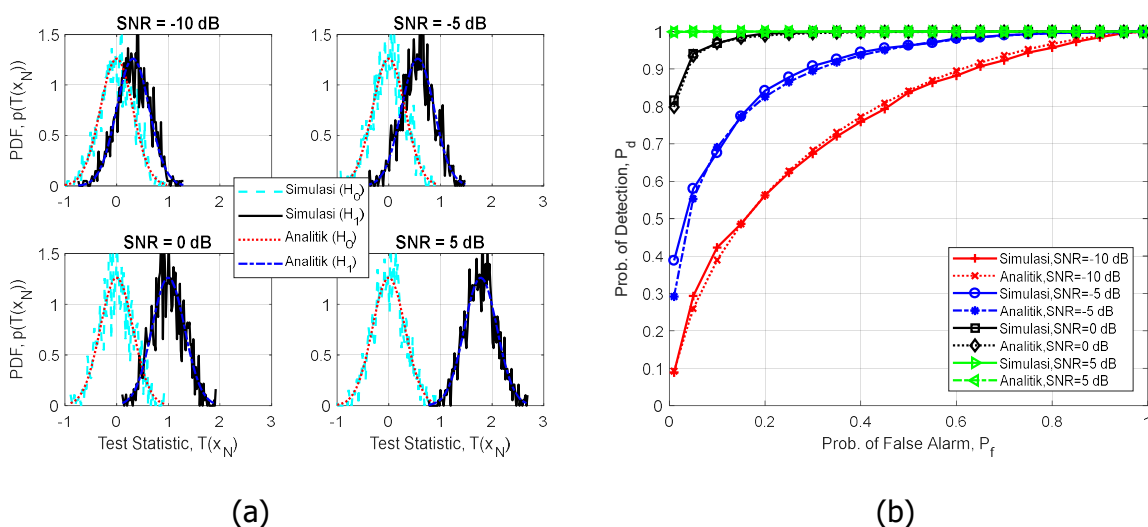
$$P_d = Q \left(Q^{-1} \left(\frac{P_f}{2} \right) - \sqrt{\frac{NA^2}{\sigma^2}} \right) + Q \left(Q^{-1} \left(\frac{P_f}{2} \right) + \sqrt{\frac{NA^2}{\sigma^2}} \right). \quad (43)$$

5. HASIL SIMULASI

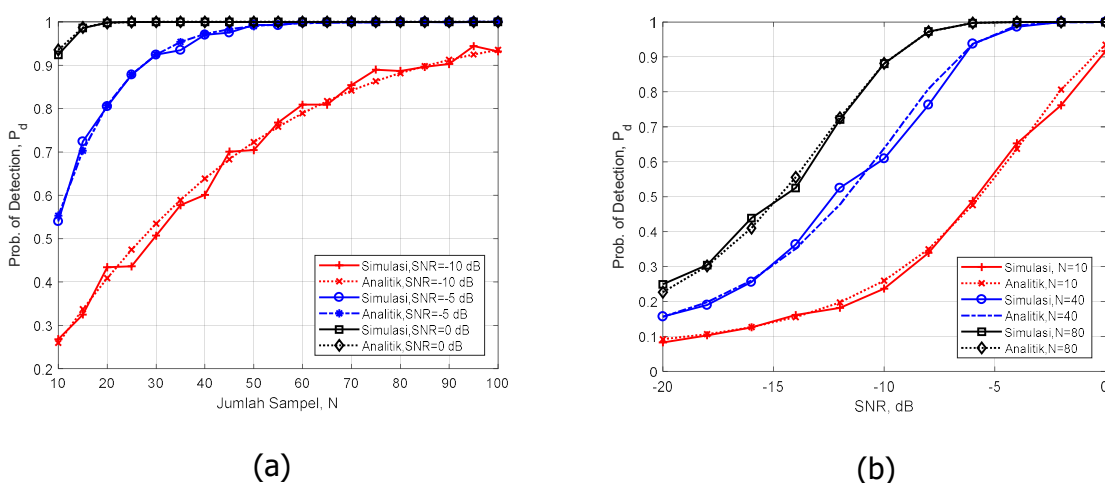
Bagian ini akan menunjukkan kinerja detektor yang telah dijelaskan pada bagian 4, yaitu untuk kasus distribusi diketahui menyeluruh menggunakan *test statistic* Persamaan (21). Ada dua tujuan utama dari simulasi ini. Pertama adalah menunjukkan bahwa kinerja detektor yang diturunkan secara analitis pada Persamaan (34) dan dengan simulasi Monte Carlo (MC), akan menghasilkan kinerja serupa. Kedua, menunjukkan pengaruh dua parameter penting yaitu *Signal to Noise Ratio* (SNR) dan jumlah sampel N terhadap kinerja detektor. SNR dalam

simulasi ini didefinisikan sebagai $SNR = 10 \log_{10}(\frac{A^2}{\sigma^2})$, dimana daya *noise* ditetapkan $\sigma^2 = 1$ untuk keseluruhan simulasi. Hasil simulasi diperoleh dengan melakukan pengulangan Monte Carlo sebanyak 1000 kali. Kurva akan semakin mendekati hasil analitis jika pengulangan Monte Carlo diperbanyak. Pengulangan 1000 kali sengaja diambil agar hasil simulasi dan analitis dapat dibedakan secara visual.

Gambar 2.a menunjukkan distribusi *test statistic* Persamaan (23) saat tidak ada sinyal (H_0) dan ada sinyal (H_1), baik secara analitis pada Persamaan (29) maupun dengan simulasi MC. Gambar tersebut memperlihatkan distribusi *test statistic* secara analitis dan simulasi mempunyai hasil serupa. Ketika SNR naik, distribusi *test statistic* saat H_1 akan bergeser menjauh ke sebelah kanan dari distribusi *test statistic* saat H_0 . Sehingga kinerja detektor berupa *probability of detection*, untuk *probability of false alarm* tertentu, akan semakin membaik (membesar), seperti yang ditunjukkan Gambar 2.(b).



Gambar 2. (a) PDF dari *Test Statistic* (b) Kurva *Receiver Operating Characteristics* (ROC) sebagai Parameter Kinerja untuk Nilai SNR yang Berbeda



Gambar 3. Kinerja Detektor dengan Parameter *Probability of Detecion* P_d (a) sebagai Fungsi Jumlah Sampel N (b) sebagai Fungsi SNR

Kinerja detektor sebagai fungsi dari jumlah sampel N untuk SNR yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 3.a. Sesuai dengan dugaan bahwa jumlah sampel N semakin besar maka kinerja detektor dengan parameter *probability of detection* akan semakin naik. Karena dengan sampel yang semakin banyak detektor mempunyai jumlah informasi yang lebih banyak untuk mengambil keputusan secara benar berdasarkan observasi yang dilakukan. Sedangkan Gambar 3.b. menunjukkan *probability of detection* semakin baik untuk SNR yang semakin besar, karena daya sinyal semakin dominan dibandingkan dengan daya derau. Hal tersebut memberikan kemudahan untuk detektor dalam menentukan keberadaan sinyal yang diinginkan bersama derau. Kedua gambar dihasilkan dengan *probability of false alarm* diset $P_f = 0,05$. Karena terbatasnya halaman paper ini, hasil simulasi kinerja detektor dengan distribusi diketahui sebagian bisa didapat dari lampiran suplemen yang dapat diminta melalui email ke penulis pertama.

Catatan. Paper ini merupakan penjelasan sebagian kecil dari teori deteksi yang sudah banyak berkembang, yang didukung oleh perkembangan teori statistik, terutama menyangkut *hypothesis testing*. Banyak metode untuk deteksi sinyal selain menggunakan pendekatan Neyman-Pearson, misalkan dengan pendekatan statistik Bayesian (**Varshney, 1998**). Pada kasus deteksi sinyal untuk kondisi SNR yang sangat kecil dapat digunakan metode *Locally Optimum Detection* (**Kassam, 1988**)(**Suratman, 2010**). Banyak kasus dimana distribusi dari *test statistic* tidak dapat ditentukan dalam bentuk tertutup, sehingga bergantung dengan statistik aproksimasi, misalkan dengan teorema *central limit* atau teorema *large number* (**Serfling, 2009**). Tetapi untuk jumlah sampel yang kecil, hasil analitis pendekatan statistik aproksimasi akan berbeda cukup jauh dari hasil simulasi. Untuk mengatasi hal tersebut dapat digunakan **Bootstrapping** (**Zoubir, 2004**). *Bootstrapping* juga dapat dilakukan untuk deteksi sinyal secara adaptif, tidak bergantung pada asumsi distribusi sinyal yang digunakan (**Suratman, 2013**). Teori deteksi sekuensial dimana jumlah sampel dibuat *random* dapat dilihat pada (**Suratman, 2014**). Deteksi sekuensial diturunkan berdasarkan teorema *sequential analysis* (**Wald, 1945**). Deteksi sekuensial mempunyai dua keuntungan, yaitu: *Probability of false alarm* dan *miss detection* dapat dikontrol sekaligus pada saat bersamaan, dan menghasilkan jumlah rata-rata sampel yang lebih kecil dibanding metode Neyman-Pearson dengan jumlah sampel tetap. Deteksi sinyal dapat juga dilakukan secara kolaboratif oleh banyak detektor secara bersamaan yang disebut dengan deteksi terdistribusi (*distributed detection*). Cara tersebut dapat dilihat di (**Varshney, 1998**) dan (**Suratman, 2011**). Deteksi sinyal yang menggabungkan teknik sekuensial dan *multiple testing procedure* yang diimplementasikan untuk *multiband spectrum sensing* dapat dilihat di (**Suratman, 2014**).

6. KESIMPULAN

Overview mengenai deteksi sinyal menggunakan model parametrik Neyman-Pearson dipresentasikan pada paper ini. Contoh penurunan metode Neyman-Pearson untuk desain *test statistic* telah diberikan dengan menggunakan model distribusi Gaussian dengan skenario kondisi distribusi diketahui penuh dan diketahui sebagian. Hasil eksperimen kinerja detektor secara analitis dan simulasi telah diperlihatkan dan menunjukkan kinerja yang serupa. Diharapkan paper ini dapat dijadikan sebagai dasar bagi para peneliti maupun mahasiswa yang tertarik untuk mempelajari teori deteksi sinyal untuk berbagai aplikasi. Teori deteksi sinyal yang lebih kompleks dapat ditemukan pada referensi-referensi yang dicantumkan pada paper ini.

DAFTAR RUJUKAN

- Axell, E., Leus, G., Larsson, E.G., & Poor, H.V. (2012). *Spectrum sensing for cognitive radio: State-of-the-art and recent advances*. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(3), 101–116.
- Garcia, R.L. (1994). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Gibson, J.D. & Melsa, J.L. (1996). *Introduction to nonparametric detection with applications*. New York: IEEE Press.
- Hossain, E., Niyato, D., & Han, Z. (2009). *Dynamic Spectrum Access and Management in Cognitive Radio Networks*. Cambridge University Press.
- Kassam, S.A. (1988). *Signal detection in non-Gaussian noise*. Springer-Verlag.
- Kay, S.M. (1993). *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, Inc.
- Kay, S.M. (1998). *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory*. Prentice Hall, Inc.
- Poor, V.H. (1988). *An introduction to signal detection and estimation*. Springer-Verlag.
- Richards, M.A (2014). *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw Hill Education.
- Serfling, R.J. (2009) *Approximation theorems of mathematical statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Suratman, F.Y., Chakhchoukh, Y., & Zoubir, A.M. (2010). Locally Optimum Detection in Heavy-Tailed Noise for *Spectrum Sensing in Cognitive Radio*. *The 2nd International Workshop on Cognitive Information Processing (CIP)*, (pp. 134-139).
- Suratman, F.Y. and Zoubir, A.M. (2013). Bootstrap Based Sequential Probability Ratio Tests. *The IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, (pp. 6352-6356).
- Suratman, F.Y. & Zoubir, A.M. (2014). Multiple Testing for Sequential Probability Ratio Tests with Application to Multiband *Spectrum Sensing*, in *The IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, (pp. 3444-3448).
- Wald, A. (1945). Sequential tests of statistical hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*.(pp.117–186).
- Varshney, P.K. (1997) *Distributed detection and data fusion*. Springer.
- Zoubir, A.M. (2004). *Bootstrap techniques for signal processing*. Cambridge University Press.